

Correction Devoir surveillé n°2A

Exercice 1 - Inspiré d'ECRICOME 2020

Dans cet exercice, on désigne par \mathcal{M}_3 l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de \mathcal{M}_3 . Soit a un réel; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. On explicite la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$\begin{aligned} (M - I_3)^2 = 0 &\iff M^2 - 2M + I_3 = 0 \\ &\iff M^2 - 2M = -I_3 \\ &\iff M(2I_3 - M) = I_3 \end{aligned}$$

La matrice M est inversible et son inverse est $M^{-1} = 2I_3 - M$.

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$. La matrice M s'écrit donc $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. On résout le système d'équation

$$\begin{aligned} M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2x - y - z = x \\ x - z = y \\ x - y = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y + z \\ 0 = 0 & L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ 0 = 0 & L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } S = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

4. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right) \quad L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$$

Après avoir échelonné la matrice par la méthode du pivot de Gauss, on remarque qu'un pivot est nul.

La matrice M n'est donc pas inversible.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on pose les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. On résout le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \iff x = y = z = 0$$

Le système est bien de Cramer et son unique solution est $S = \{(0, 0, 0)\}$.

6. On calcule

$$\boxed{M \times u = \begin{pmatrix} 2 + a - 1 - 1 \\ 1 - a + a + a - 1 \\ 1 + a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = au.}$$

On calcule ensuite

$$\boxed{M \times v = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1 - a + a - 1 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v}$$

7. On calcule

$$M \times w = \begin{pmatrix} 2+a-1 \\ 1-a+a \\ 1+a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w + av$$

Ainsi

$$\boxed{M \times w = w + av.}$$

8. A l'aide de la question 5, on sait déjà que le système associé à la matrice P est de Cramer, la matrice P est inversible. On utilise la méthode du pivot de Gauss pour déterminer l'inverse : On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad L_1 - L_3 \rightarrow L_1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a finalement } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

9. On calcule

$$\begin{aligned} P^{-1}M &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2+1-a+1 & -a+1+a+a-1 & 1+a-1 \\ 2-1+a & a-1-a & -1-a+1 \\ 2-1 & a-1-(a-1) & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a & a & a \\ 1+a & -1 & -a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
 P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} -a & a & a \\ 1+a & -1 & -a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -a+a+a & -a+a & -a+a \\ 1+a-1-a & 1+a-a & 1+a-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On a bien $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- **Initialisation** : La proposition \mathcal{P}_0 s'écrit $T^0 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc l'initialisation est vérifié.

- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
 T^{n+1} &= T^n \times T \\
 &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^n \times a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a + na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (n+1)a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. On calcule On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{M^n = PT^nP^{-1}\}$.

- **Initialisation** : On a $M^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc l'initialisation est vérifié.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
 M^{n+1} &= M^n \times M \\
 &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} \\
 &= PT^n \times T \times P^{-1} \\
 &= PT^{n+1}P^{-1}
 \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, M^n = PT^n P^{-1}}$.

On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} PT^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 1 & 1+na \\ a^n & 0 & 1 \\ a^n & 1 & na \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a également

$$\begin{aligned} M^n = PT^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} a^n & 1 & 1+na \\ a^n & 0 & 1 \\ a^n & 1 & na \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 2+na-a^n & a^n-1 & a^n-1-na \\ 1-a^n & a^n & a^n-1 \\ 1+na-a^n & a^n-1 & a^n-na \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Exercice 2 Inspiré EML 2019 et ECRICOME 2019

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, h_1(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$$

et la suite u_n définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n} = h_1(u_n)$.

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. La fonction h_1 est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* . On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h_1'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Or $x^2 - 1 \geq 0$ pour $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et $x^2 - 1 < 0$ pour $x \in]-1; 1[$. Ainsi,

$\boxed{\text{la fonction } h_1 \text{ est croissante sur } [1; +\infty[\text{ et décroissante sur }]0; 1].}$

2. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h_1(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) = +\infty$$

De plus $h_1(1) = 3$. On en déduit le tableau variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de h_1'		-	0
Variations de h_1	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		3	$+\infty$

3. L'équation de la tangente à la courbe en $x = 2$ est donnée par

$$y = h_1'(2)(x - 2) + h_1(2)$$

c'est à dire $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{2}$ et en simplifiant

$$y = \frac{3}{4}x + 2.$$

4. Script Scilab :

```
function y = h1(x)
    y = (3/4)*x + 2
endfunction
```

```
X = 0.001:0.001:5
plot(X,f)
```

5. Tracer la courbe représentative de h_1 ainsi que sa tangente en $x = 1$.

6. On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ est bien définie et } u_n > 0\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit " u_0 existe et $u_0 > 0$ " or $u_0 = 2$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . Donc $u_n \neq 0$ et ainsi $u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$ est bien défini. On a $u_n > 0$ et $\frac{1}{u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$. La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 1 + \frac{1}{u_n} - u_n \\ &= 1 + \frac{1}{u_n} > 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

8. Le script Scilab est

```
n = input("Entrez un nombre entier n")
u = 2
```

```
for k = 1:n
    u = u + 1 + 1/u
end
```

```
disp(u)
```

9. Les fonctions $x \rightarrow x + 1$ et $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sont continues sur $[1; +\infty[$. La fonction h_1 est donc continue sur $[1; +\infty[$. Elle est également croissante sur $[1; +\infty[$ et

$$h_1([1; +\infty[) = [3; +\infty[.$$

Donc d'après le théorème de la bijection,

la fonction h_1 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[3, +\infty[$.

On note $g : [3, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de h_1 à $[1, +\infty[$.

10. (a) D'après le théorème de la bijection, la fonction g est également croissante et

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

On en déduit alors le tableau de variation suivant :

x	3	$+\infty$
Variations de h_1		

(b) Soit $y \in [3, +\infty[$. On résout l'équation

$$\begin{aligned} h_1(x) = y &\iff x + 1 + \frac{1}{x} = y \\ &\iff x^2 + x + 1 = xy \\ &\iff x^2 + (1 - y)x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant d'une telle équation est

$$\Delta = (1 - y)^2 - 4 = y^2 - 2y - 3$$

Le discriminant de l'équation $y^2 - 2y - 3 = 0$ est $\delta = 4 + 12 = 16$. Ainsi, cette équation a deux solutions

$$y_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Donc, pour $y \geq 3$, $y^2 - 2y - 3 \geq 0$. Ainsi l'équation $x^2 + (1 - y)x + 1 = 0$ a deux solutions

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(1 - y) + \sqrt{y^2 - 2y - 3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(1 - y) - \sqrt{y^2 - 2y - 3}}{2} \\ x_1 &= \frac{y - 1 + \sqrt{y^2 - 2y - 3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{y - 1 - \sqrt{y^2 - 2y - 3}}{2} \end{aligned}$$

Or

$$(y - 3)^2 - (y^2 - 2y - 3) = -4y + 12 = 4(3 - y) < 0$$

$$\begin{aligned} (y - 3)^2 < y^2 - 2y - 3 &\iff \sqrt{(y - 3)^2} < \sqrt{y^2 - 2y - 3} \\ &\iff y - 3 < \sqrt{y^2 - 2y - 3} \\ &\iff -(y - 3) > -\sqrt{y^2 - 2y - 3} \\ &\iff y - 1 - y + 3 > y - 1 - \sqrt{y^2 - 2y - 3} \\ &\iff \frac{2}{2} > \frac{y - 1 - \sqrt{y^2 - 2y - 3}}{2} \\ &\iff 1 > x_2 \end{aligned}$$

Ainsi, la seule solution valide est

$$x_1 = \frac{y - 1 + \sqrt{y^2 - 2y - 3}}{2}$$

Partie B : Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. La fonction h_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. On calcule alors

$$\begin{aligned} h'_n(x) &= nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} \\ &= n \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

On résout alors

$$\begin{aligned} x^{2n} - 1 \geq 0 &\iff x^{2n} \geq 1 \\ &\iff e^{2n \ln(x)} \geq 1 \\ &\iff 2n \ln(x) \geq 0 \\ &\iff \ln(x) \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

La fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

2. La fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1]$. Elle est continue sur $]0, 1]$ en tant que somme de fonctions continues sur $]0, 1]$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(]0, 1]) = [3; +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution dans $]0, 1]$ (notée w_n) telle que $h_n(x) = 4$.

La fonction h_n est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Elle est continue sur $[1; +\infty[$ en tant que somme de fonctions continues sur $[1; +\infty[$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n([1; +\infty[) = [3; +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution dans $[1; +\infty[$ (notée v_n) telle que $h_n(x) = 4$. Ainsi

l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, w_n et v_n et vérifiant : $0 < w_n < 1 < v_n$.

3. (a) Démontrer que $\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \frac{x^{2n+2} + x^{n+1} + 1 - x^{2n+1} - x^{n+1} - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+1}(x-1) + (1-x)}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

- (b) En posant $x = v_n$, on a

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}}$$

Or $h_n(v_n) = 4$ par définition. De plus d'après la question précédente $v_n \geq 1$ donc $v_n - 1 \geq 0$ et $v_n^{2n+1} - 1 \geq 0$ donc

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) \geq 0 \iff h_{n+1}(v_n) \geq 4.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 2, $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$ on a donc

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

La fonction h_{n+1} est bijective et sa fonction réciproque est strictement croissante sur $[3; +\infty[$.
Donc

$$\begin{aligned} h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1}) &\iff h_{n+1}^{-1} \circ h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}^{-1} \circ h_{n+1}(v_{n+1}) \\ &\iff v_n \geq v_{n+1} \end{aligned}$$

La suite (v_n) est décroissante.

4. (a) Soit $n \geq 1$, on a $h_n(1) = 3 \leq 4$ et $h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} \geq 4$. La fonction étant continue sur $[1, 3]$, l'équation $h_n(x) = 4$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire admet une solution sur $[1, 3]$. Comme cette équation a une unique solution sur $[1; +\infty[$, cette solution est forcément v_n , on a donc

$$v_n \leq 3$$

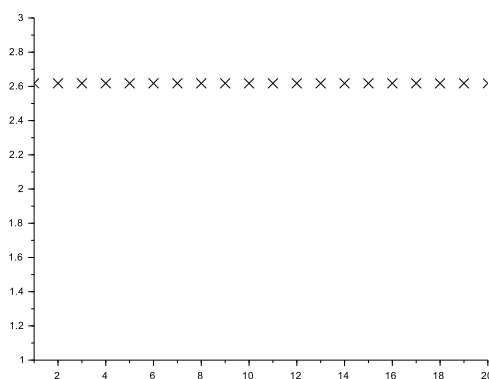
(b) Script Scilab

```
function y = h(n,x)
    y = x^n + 1 + 1/x^n
endfunction
```

(c) On admet que l'on a écrit une fonction v qui a chaque entier n associe une valeur approchée de v_n . On écrit alors le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
    Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=-2,rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



On affiche les résultats de v_k^k pour $k \in [0, 20]$. Ces résultats semblent constants.

- (d) D'après la question 2, on a $h_n(v_n) = 4$. Or $h_n(v_n) = v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n}$. On note alors $X = v_n^n$ et on résout donc

$$X + 1 + \frac{1}{X} = 4$$

Or cette équation a été résolue dans la partie A, à la question 10 (b) pour $y = 4$. La solution est alors

$$X = \frac{4 - 1 + \sqrt{16 - 8 - 3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Exercice 3 - Inspiré de ECRICOME ECT 2017 et ECRICOME ECE 2015

Partie I : tirages dans une urne

Une urne \mathcal{U} contient 1 boule noire et 9 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans \mathcal{U} . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.

- (a) "Obtenir une boule noire" est une expérience de Bernoulli de probabilité de succès $p = \frac{1}{10}$. On répète cette expérience 400 fois de façon indépendante et X compte le nombre de succès. X suit donc une loi binomiale de paramètre 400 et $\frac{1}{10}$

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 400 \rrbracket \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{B}(400, 1/10).$$

On a alors pour tout $k \in \llbracket 0, 400 \rrbracket$,

$$P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{400-k}$$

- (b) D'après le cours,

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{10} = 40 \text{ et } V(X) = 400 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 36.$$

2. On procède cette fois-ci dans \mathcal{U} à une suite de 4 tirages avec remise d'une boule. On appelle Y la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré au moins une boule noire, 0 sinon.

- (a) Il n'y a que deux cas possibles. On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. La variable aléatoire Y suit donc une loi de Bernoulli. On calcule

$$P(Y = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^4$$

En effet, ne tirer aucune boule noire signifie tirer 4 boules rouges. Les tirages étant indépendants, le résultat est obtenu en effectuant le produit. Ainsi

$$P(Y = 1) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4$$

$$\text{Donc } Y \hookrightarrow \mathcal{B} \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^4 \right).$$

(b) D'après le cours,

$$E(Y) = 1 - \left(\frac{9}{10} \right)^4 \text{ et } V(Y) = \left(\frac{9}{10} \right)^4 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^4 \right).$$

3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne \mathcal{U} successivement et sans remise les 10 boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'évènement "On tire une boule noire lors du i -ème tirage".
- B_i l'évènement "On tire une boule blanche lors du i -ème tirage".

(a) L'évènement $(Z = 1) = N_1$ donc

$$P(Z = 1) = \frac{1}{10}$$

De la même façon, pour $Z = 2$, il faut d'abord tirer une boule blanche puis une boule noire. Donc $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2)$. Donc

$$P(Z = 2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

De la même façon, $(Z = 3) = B_1 \cap B_2 \cap N_3$. D'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(b) La boule noire peut arriver entre le premier et le 10ème tirage. On a donc $Z(\Omega) = \llbracket 1, 10 \rrbracket$. Or pour $k \in \llbracket 2, 10 \rrbracket$, on a alors $(Z = k) = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \dots \times P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{11-k}{12-k} \times \frac{1}{11-k} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$Z \text{ suit donc une loi uniforme. } Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket).$$

(c) D'après le cours,

$$E(Z) = \frac{10+1}{2} = 5,5 \text{ et } V(Z) = \frac{10^2-1}{12} = \frac{99}{12}.$$

Partie II : tirages doubles dans une urne choisie au hasard

L'urne \mathcal{U} , contient toujours 1 boule noire et 9 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne \mathcal{V} , contient 5 boules noires et 5 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans \mathcal{U} , et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans \mathcal{V} . On note :

- U l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{U} ".
- V l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{V} ".

On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. On peut ne tirer 0, 1 ou 2 boules noires (il y a deux tirages) donc

$$\boxed{T(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket.}$$

2. On considère le système complet d'évènement (U, V) . D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(U)P_U(T = 0) + P(V)P_V(T = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{81}{200} + \frac{25}{200} \\ &= \frac{53}{100} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(T = 2) &= P(U)P_U(T = 2) + P(V)P_V(T = 2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \\ &= \frac{13}{100} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(T = 1) &= 1 - P(T = 2) - P(T = 0) \\ &= 1 - \frac{13}{100} - \frac{53}{100} \\ &= \frac{34}{100} \\ &= \frac{17}{50} \end{aligned}$$

3. D'après la formule de l'espérance, on a

$$\begin{aligned} E(T) &= 0 \times P(T = 0) + P(T = 1) + 2P(T = 2) \\ &= \frac{17}{50} + \frac{13}{50} \\ &= \frac{30}{50} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Si la loi suivait une loi binomiale de paramètre $n = 2$ (vu le support de T) et p alors

$$E(T) = np = \frac{3}{5} \implies p = \frac{3}{10}$$

On devrait alors avoir $P(T = 2) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \neq \frac{1}{8}$. Donc,

la variable aléatoire T ne suit pas une loi binomiale.

4. On cherche à calculer et comparer $P_{T=1}(U)$ et $P_{T=1}(V)$. On utilise pour cela la formule de Bayes. On a $P_U(T = 1) = 1 - P_U(T = 0) - P_U(T = 2) = 1 - \frac{81}{100} - \frac{1}{100} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$

$$\begin{aligned} P_{T=1}(U) &= \frac{P(U)}{P(T=1)} P_U(T=1) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{50}} \times \frac{9}{50} \\ &= \frac{50}{34} \times \frac{9}{50} \\ &= \frac{9}{34} \end{aligned}$$

De même $P_V(T = 1) = 1 - P_V(T = 0) - P_V(T = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P_{T=1}(V) &= \frac{P(V)}{P(T=1)} P_V(T=1) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{50}{34} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{34} \end{aligned}$$

Sachant que $T = 1$, Il est plus probable d'avoir obtenu Face avec la pièce.

Partie III : Tirages infinies dans une urne choisie au hasard

L'urne \mathcal{U} , contient toujours 1 boule noire et 9 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne \mathcal{W} , contient 10 boules blanches. On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne ayant la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note S la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note :

- U l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{U} ".
- W l'évènement "On choisit l'urne \mathcal{W} ".

1. Sachant que l'on tire dans l'urne U , on se retrouve dans la même situation que dans la partie I et l'on cherche à savoir quand l'on tire la boule noire (on sait alors avec certitude que l'on a tiré dans l'urne U). Ainsi pour tout entier $j \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$:

$$P_U(S = j) = P(Y = j) = \frac{1}{10}$$

2. Si l'on sait que l'on tire dans l'urne W , il faut tirer toutes les boules pour s'apercevoir que nous étions dans l'urne W , ainsi

$$P_W(S = 10) = 1$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1, 9 \rrbracket, P_W(S = j) = 0$$

3. On considère le système complet d'évènement (U, W) et on va utiliser la formule des probabilités totales. Si $j \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P(S = j) &= P(U)P_U(S = j) + P(W)P_W(S = j) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times 0 \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Et pour $j = 10$,

$$\begin{aligned} P(S = 10) &= P(U)P_U(S = 10) + P(W)P_W(S = 10) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Donc

$$P(S = j) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{si } j \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \\ \frac{11}{20} & \text{si } j = 10 \end{cases}$$

4. L'espérance de S est

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{j=1}^{10} jP(S = j) \\ &= \sum_{j=1}^9 jP(S = j) + 10 \times P(S = 10) \\ &= \frac{1}{20} \sum_{j=1}^9 j + \frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{9 \times 10}{2} + \frac{11}{2} \\ &= \frac{31}{4} \end{aligned}$$

5. On calcule $E(S^2)$ en utilisant la formule de transfert,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sum_{j=1}^{10} j^2 P(S = j) \\ &= \sum_{j=1}^9 j^2 P(S = j) + 100 \times P(S = 10) \\ &= \frac{1}{20} \sum_{j=1}^9 j^2 + 55 \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + 55 \\ &= \frac{57}{4} + 55 \\ &= \boxed{\frac{277}{4}} \end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\begin{aligned} V(S) &= E(S^2) - E(S)^2 \\ &= \frac{277}{4} - \frac{961}{16} \\ &= \frac{1108}{16} - \frac{961}{16} \\ &= \boxed{\frac{147}{16}} \end{aligned}$$